

1. Nekonečné řady.

1. Vyšetřete absolutní, případně neabsolutní konvergenci řady:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n}$ ; b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$ ; c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ ;  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ ; d)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{1}{n}$ .

2. V závislosti na parametru  $x \in \mathbb{R}$  vyšetřete, zda konverguje absolutně, resp. konverguje neabsolutně, resp. diverguje řada

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} (x-2)^n$ ; b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n}{n^2+1} (x+1)^n$ ; c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2^n(n+1)} (x-3)^n$ ;  
 d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ; e)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ; f)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ .

2. Limita funkce.

1. Z definice limity ukažte:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x-2) = 4$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ ; c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ ; d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ .

2. Nechť funkce  $f$  je neklesající a omezená v intervalu  $(a, b)$ . Dokažte, že pak pro libovolné  $c \in (a, b)$  existují vlastní limity  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ ; co lze říci o oboustranné limitě  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ?

3. Ukažte, že platí:

(i)  $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$

(ii) Je-li  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$  a funkce  $g(x)$  je omezená v nějakém prstencovém okolí bodu  $c$ , pak i  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = 0$ .

4. Vypočítejte limity, nebo ukažte, že neexistují:

a)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{-1}{(x+3)^2}$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(x+3)^2}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+1}{x^2-1}$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+1}{x^2-1}$ ;  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{1-x^2}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4x-5}{(x-1)^2}$ ;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3-x^2}$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{3-x^2}$ ;

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-x}{x}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ ;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - x)$ ;

c) (limita složené funkce)  $\lim_{x \rightarrow 3} \exp\left(\frac{1}{3-x}\right)$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp\left(\frac{1}{3-x}\right)$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ ;  $\lim_{x \rightarrow ?} \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ;

$\lim_{x \rightarrow ?} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ ;

d) Víme-li, že  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , spočítejte limity (nebo ukažte, že neexistují):

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{x}$ ;  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{\sin(x+1)}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)$ ;

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x}$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(2 + \sin x)$ ;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \cos x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \sin x$ .